

## UNIT-III

## "Theory of Conic Section"

\* निर्देशांक ज्यामिति में मुख्य रूप से निम्न वक्र होते हैं।

1. वृत्त 2. परवलय 3. दीर्घवृत्त 4. अतिपरवलय

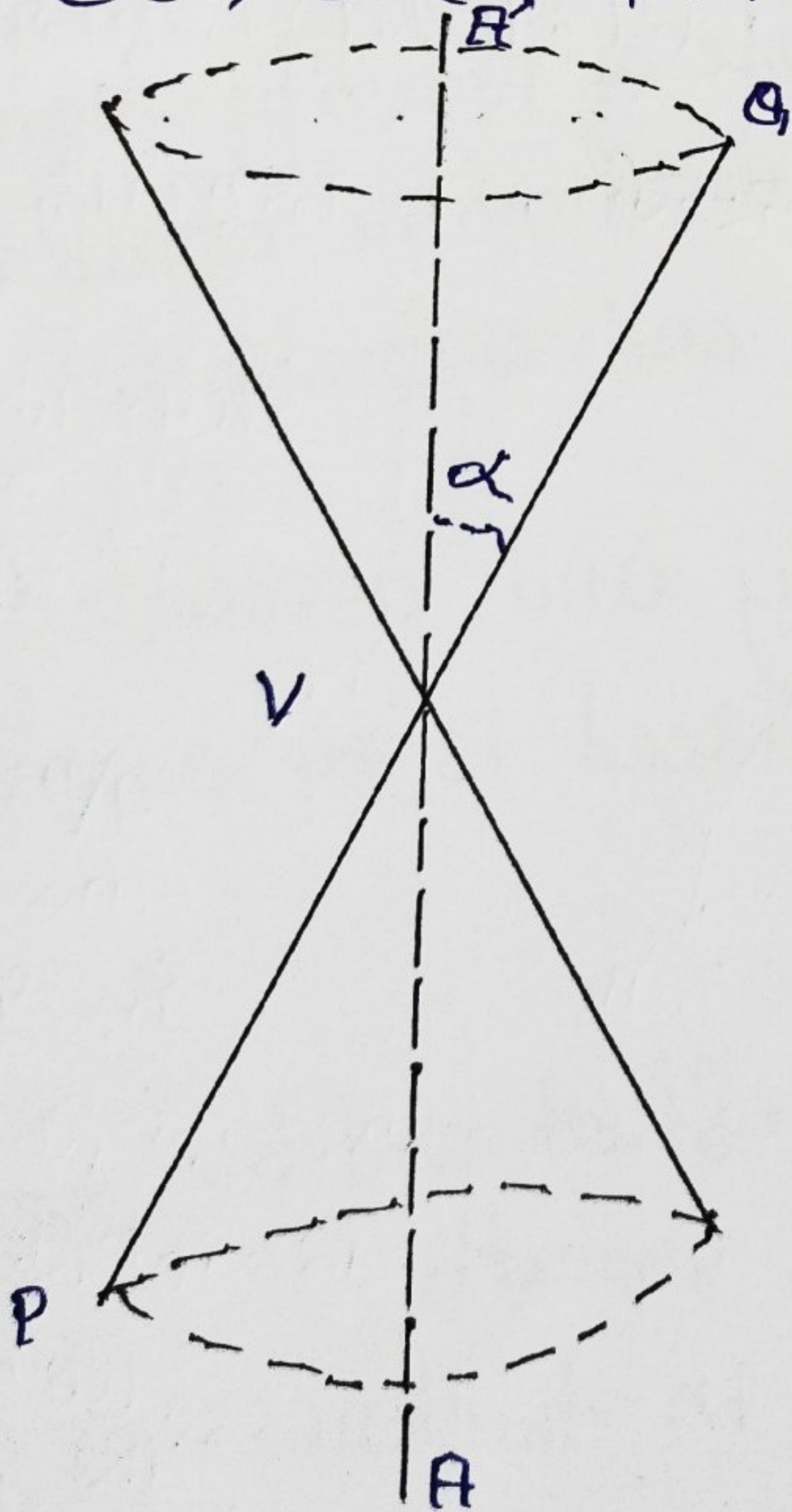
यह सभी वक्र व्यापक द्विघात समीकरणों को प्राप्त होते हैं

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{--- (1)}$$

यह समीकरण एक मानक वक्र का समीकरण है।

शांक्र परिच्छेद (Conic section) :-

एक द्वि-शंकु को समतल द्वारा भिन्न-भिन्न प्रकार से काटने पर जो परिच्छेद या वक्र प्राप्त होते हैं, उन्हें "शांक्र परिच्छेद" कहते हैं। यह वक्र सरल रेखा, वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्त, अतिपरवलय हो सकते हैं।



इसमें PQ, स्थिर रेखा AA' के पारित  
शुन कोण  $\alpha$  पर धूमती है।

AA' - अक्ष

PQ - जनक रेखा

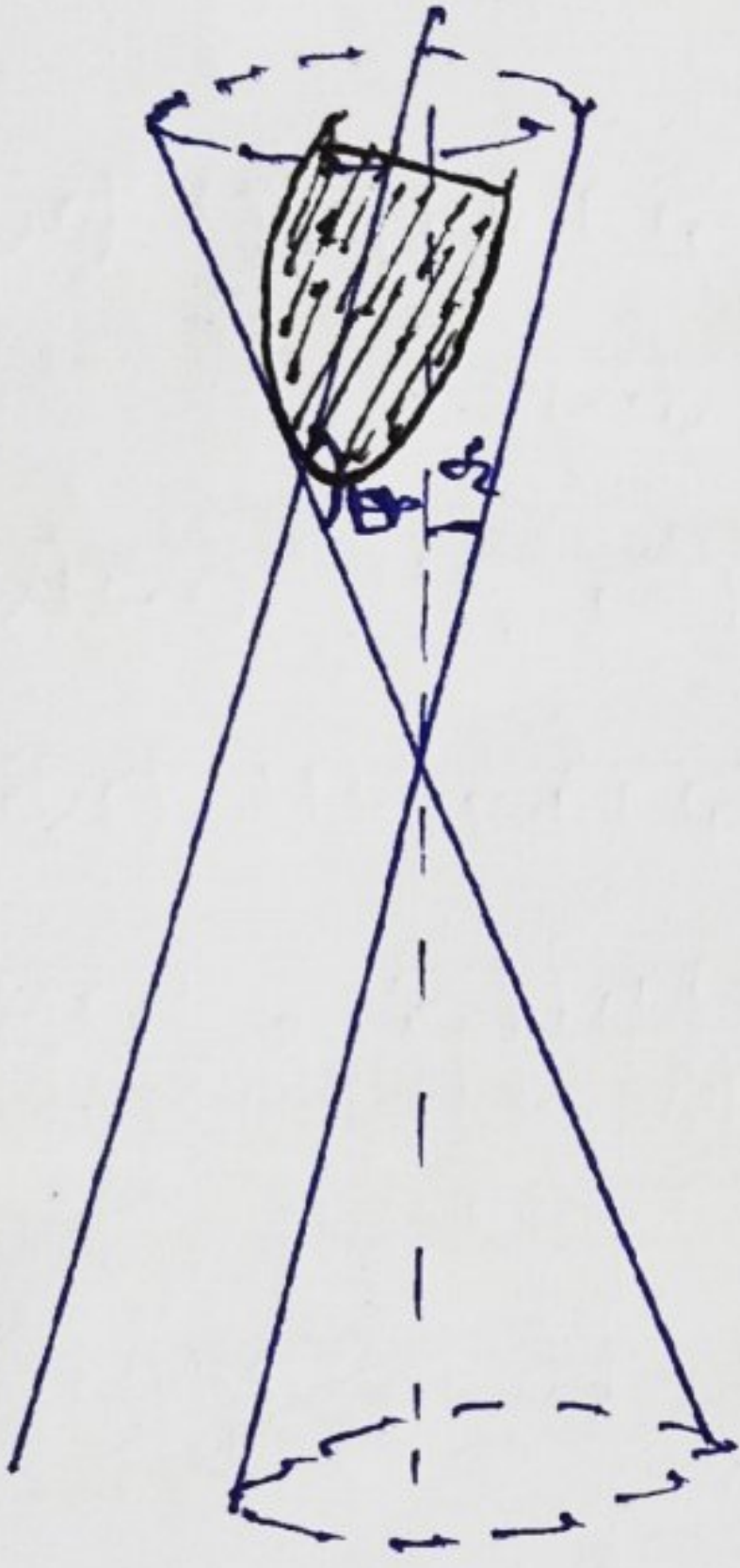
V - शीर्ष

$\alpha$  - अर्धशीर्ष कोण

शंकु परिच्छेद का वर्गीकरण :- जब कोई समतल शंकु परिच्छेद को कोण  $\theta$  पर काटता है, तो भिन्न-भिन्न वक्र प्राप्त होते हैं।

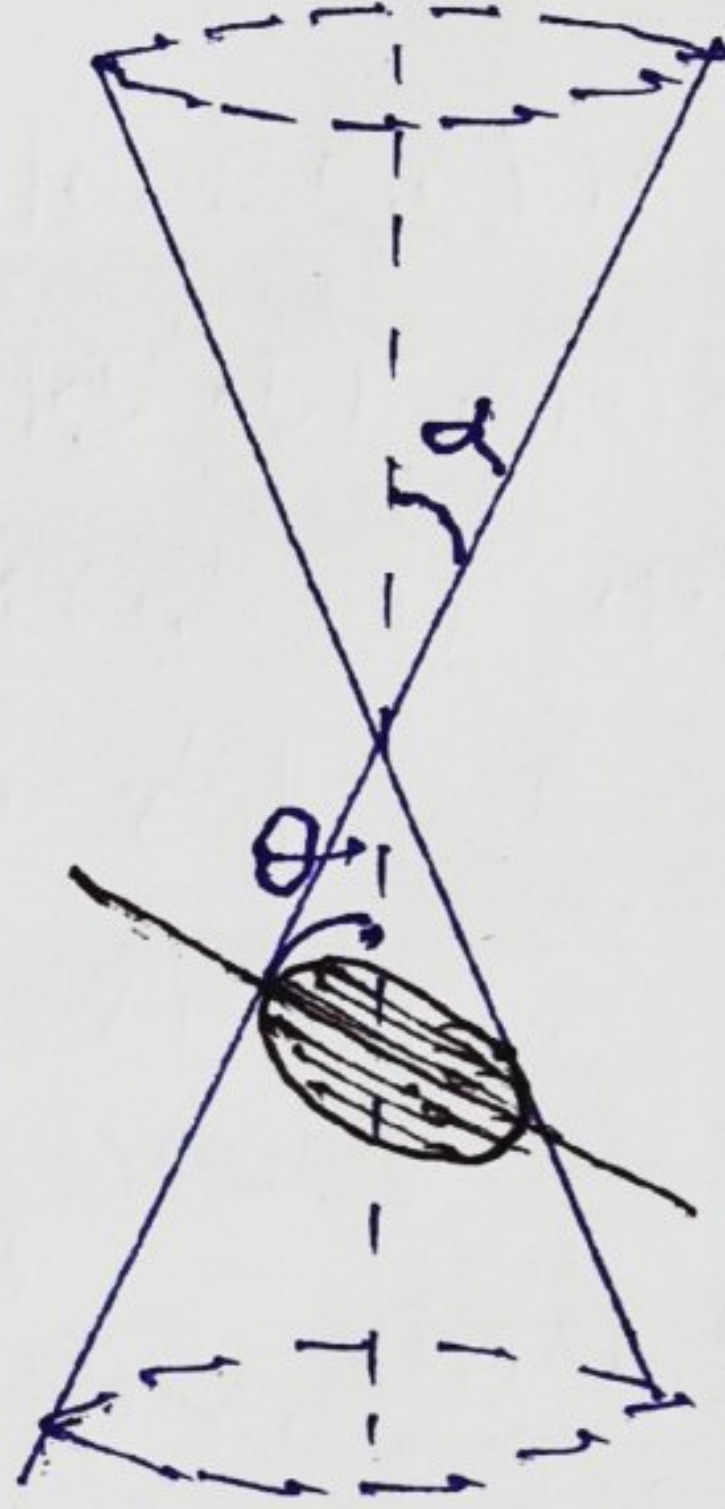
यदि

- (i)  $\theta = \alpha$  परवलय  
 (ii)  $\theta > \alpha$  दीर्घवृत्त  
 (iii)  $\theta < \alpha$  अतिपरवलय



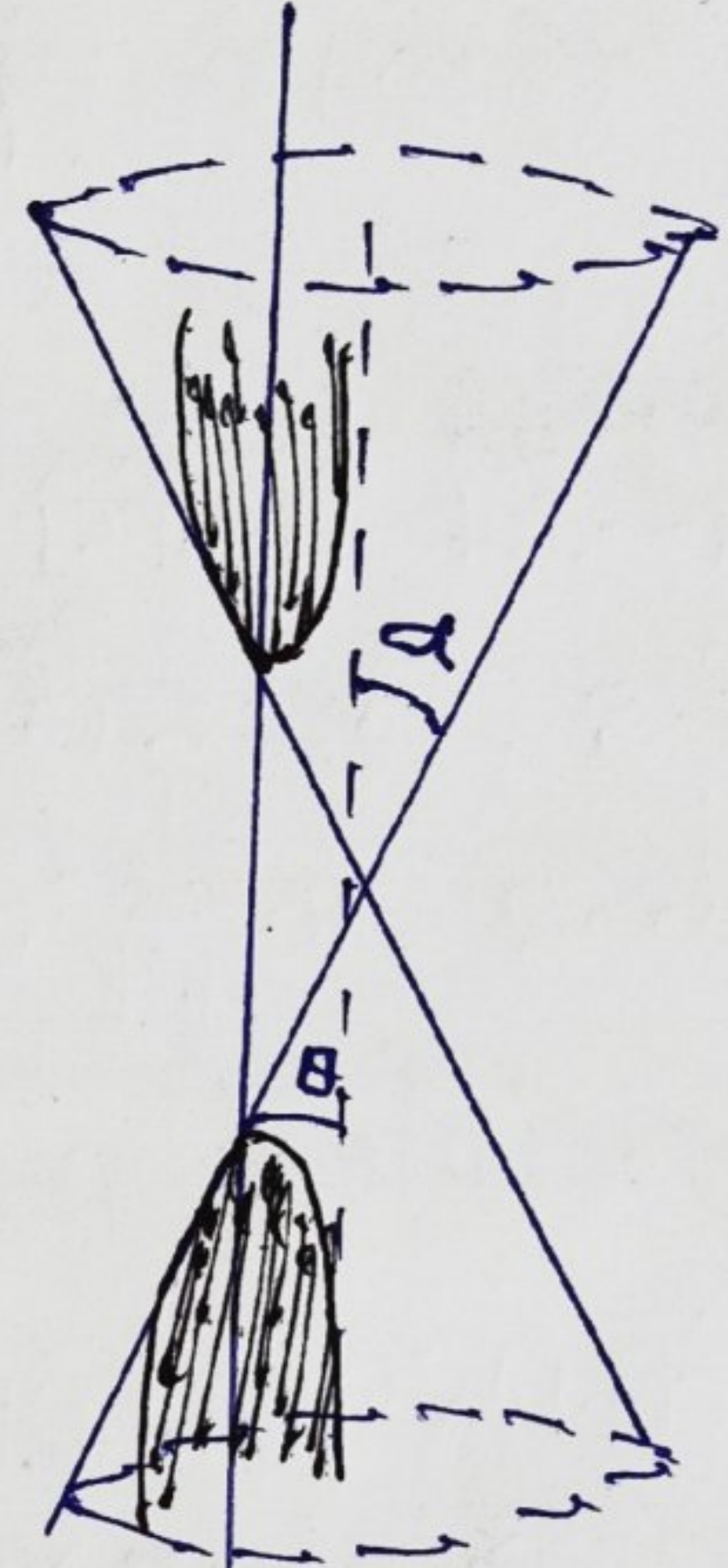
(i) परवलय

$$\theta = \alpha$$



(ii) दीर्घवृत्त

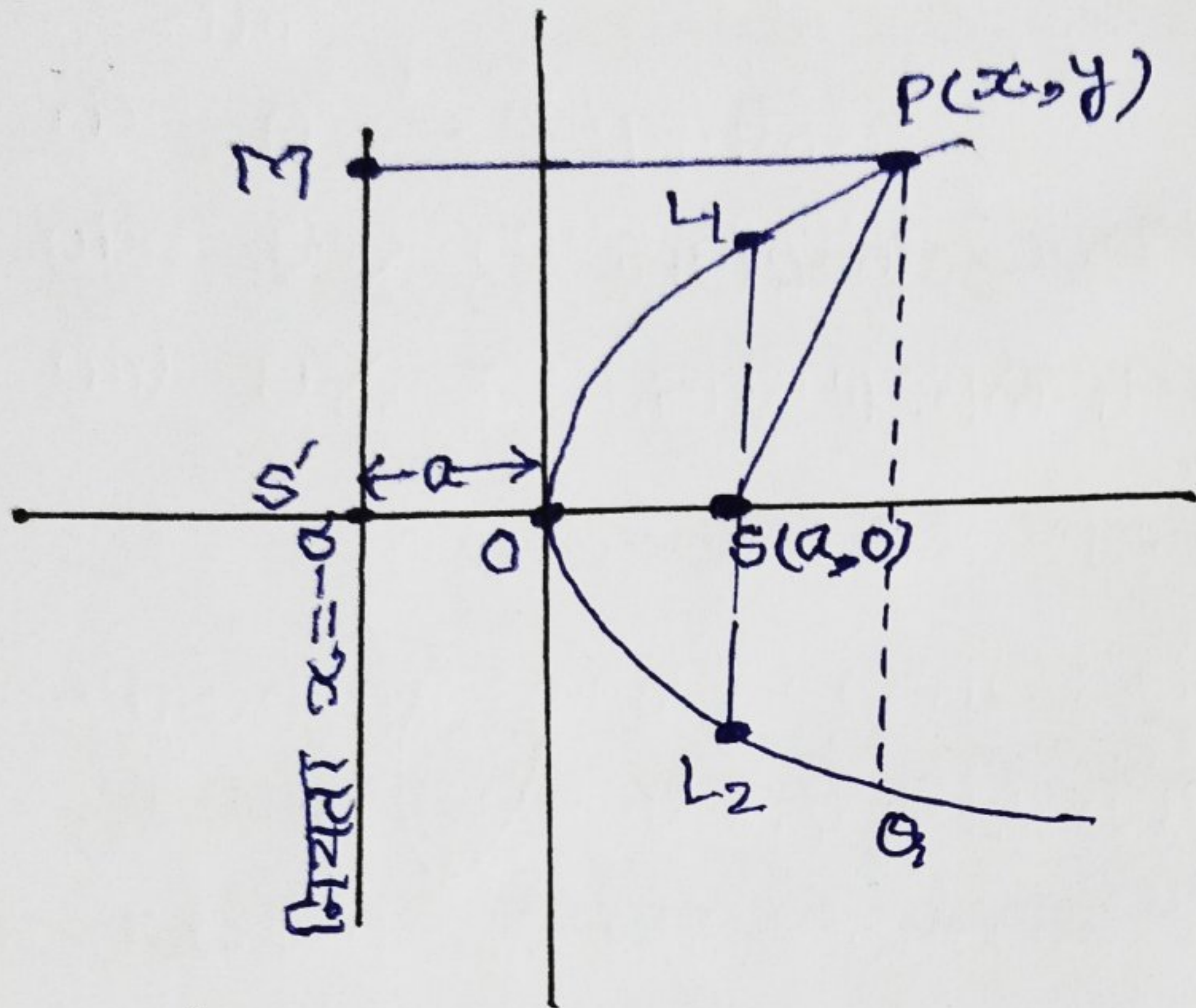
$$\theta > \alpha$$



(iii) अतिपरवलय

$$\theta < \alpha$$

पराबलय (Parabola) :-



$PS = PM$

पराबलय का समी.  $y^2 = 4ax$

नियता का समी.  $x = -a$

नियता का फाद  $S'(-a, 0)$

शीर्ष  $O(0, 0)$

नाभिलम्ब के शीर्ष

$L_1(a, 2a)$   $L_2(a, -2a)$

नाभिलम्ब की लं

$L_1L_2 = 4a$

उत्केन्द्रता  $e = 1$

दीर्घवृत्त (ELLIPSE) :-

दीर्घवृत्त में उत्केन्द्रता का मान सदैव 1 से कम होता है  $e < 1$

दीर्घवृत्त का समी.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

नियता  $x = \pm ae$

यदि  $b = a$

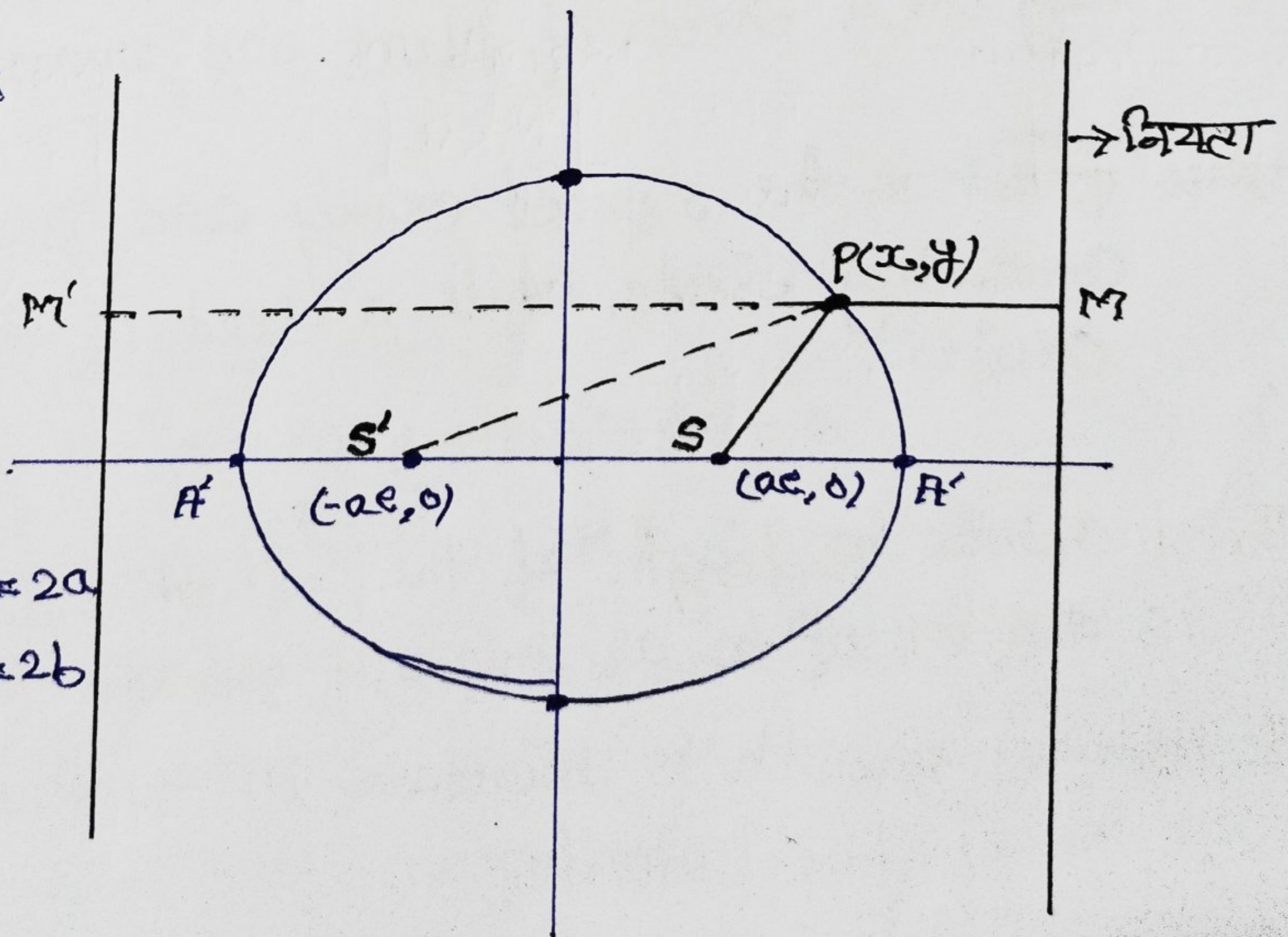
तो  $x^2 + y^2 = a^2$

दीर्घ अक्ष की लं =  $2a$

लघु अक्ष की लं =  $2b$

नाभिलम्ब की

लं =  $\frac{2b^2}{a}$



## UNIT-III (Coordinate Geometry).

अनुसंधान विधि :-

(i) सबसे पहले ही गई समी. की कुलना मानक समी. से करते हैं  
 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (1)$   
 से करते हैं।

(ii) यदि  $\Delta \neq 0$  जहाँ  $\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$   
 पर वक्र प्राप्त होता है

यदि  $\Delta \neq 0$   $h^2 = ab$  तो परवलय

(ii)  $\Delta \neq 0$   $h^2 < ab$  तो दीर्घवृत्त

(iii)  $\Delta \neq 0$   $h^2 > ab$  तो अतिपरवलय

(iv)  $\Delta \neq 0$ ,  $h^2 > ab$  व  $a+b=0$  तो आयतीय  
 अतिपरवलय है

(iii) **केंद्र निर्देशांक :-** ही गई समी.  $\phi(x, y)$  का  
 $x$  व  $y$  के सापेक्ष आंशिक अवकलन की शून्य के बराबर  
 रखकर हल करने पर केंद्र के निर्देशांक प्राप्त होते हैं

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \dots (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \dots (2)$$

(iv) समान्तर अक्षों का समी. :-

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + k = 0$$

$$\text{जहाँ } k = \frac{ab-h^2}{k} \quad k = \frac{\Delta}{ab-h^2} \text{ है}$$

$$(v) \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + k = 0$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = -k$$

$-k$  से भाग

$$\left(-\frac{a}{k}\right)x^2 + 2\left(-\frac{h}{k}\right)xy + \left(-\frac{b}{k}\right)y^2 = 0$$

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 0$$

ग्राह करते हैं

(4).

$$\text{जहाँ}$$

$$A = -a/k$$

$$H = -h/k$$

$$B = -b/k$$

## UNIT-III (Coordinate Geometry)

(VI) अक्षों की लं :-

शास्त्र के अक्षों की लं निम्न सूत्र से ज्ञात किये हैं

$$r^4 (ab - h^2) - r^2 (a+b) + 1 = 0$$

इससे  $r$  के दो मान प्राप्त होते हैंअनुप्रस्थ अक्ष की लं -  $2r_1$ सायुग्मी अक्ष की लं -  $2r_2$ (VII) उत्केन्द्रता :-(i) यदि  $r_1$  व  $r_2$  धनात्मक हों

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}$$

(ii) यदि  $r_1$  व  $r_2$  में से एक ऋणात्मक हो

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}$$

(VIII) नाभिलम्ब की लं :-

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2r_2^2}{r_1}$$

(IX) अक्षों के समी :-दीर्घ अक्ष का समी.  $(A - \frac{1}{r_1^2})x + HY = 0$ लघु अक्ष का समी.  $(A - \frac{1}{r_2^2})x + HY = 0$ (X) अक्षों की दिशाएँ :-

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$$

$$\left[ \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right]$$

## UNIT-III (Coordinate Geometry).

Exp: 1 निम्न शकंठ के केन्द्र के निर्देशांक ढाल की लिए

$$36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$$

Sol<sup>n</sup> शकंठ की समी०

$$\phi(x, y) = 36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 \quad \text{--- (1)}$$

$x$ , के सापेक्ष आंशिक अवकलन

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 72x + 24y - 72$$

$y$  के सापेक्ष आंशिक अवकलन

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 24x + 58y + 126$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$72x + 24y - 72 = 0$$

$$24(3x + y - 3) = 0$$

$$3x + y - 3 = 0$$

$$3x + y = 3 \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

$$58y + 24x + 126 = 0$$

$$2(12x + 29y + 63) = 0$$

$$12x + 29y + 63 = 0$$

$$12x + 29y = -63 \quad \text{--- (2)}$$

समी० युग्म

$$3x + y = 3 \quad \text{--- (2)}$$

$$12x + 29y = -63 \quad \text{--- (3)}$$

समी० (2) को "29" से गुणा करके (3) में से घटाने पर

$$87x + 29y = 87$$

$$12x + 29y = -63$$

$$75x = 150$$

$$x = \frac{150}{75} = 2$$

$$\boxed{x = 2}$$

$x$  का मान समी० (2) में रखने पर,

$$3(2) + y = 3 \Rightarrow 6 + y = 3$$

$$\boxed{y = -3}$$

केन्द्र (2, -3)

(6)

## UNIT-III (Coordinate Geometry)

Ex-2. निम्न समी. कोनसे शांकु को निकषित करता है  
इसके केन्द्र तथा केन्द्र को मूल बिन्दु मानकर शांकु का समी.  
जात कीजिए?

Sol<sup>n</sup> शांकु की समी.  

$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$

$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0 \quad \dots (1)$$

मानक समी.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (2)$$

(1) व (2) की तुलना करने पर,

$$a = 13, \quad 2h = -18 \quad b = 37 \quad 2g = 2 \quad 2f = 14 \quad c = -2$$

$$h = -9 \quad g = 1 \quad f = 7$$

अब

$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

$$\Delta = (13)(37)(-2) + 2(7)(1)(-9) - 13(7)^2 - 37(1)^2 - (-2)(-9)^2$$

$$= (-26)(37) + 14(-9) - (13)(49) - (37)(1) - (-2)(81)$$

$$= -962 - 126 - 637 - 37 + 162 = -1600$$

$$\Delta = -1600 \quad \Delta \neq 0 \quad \text{अतः वक्र प्राप्त होगा}$$

वक्र के लिए  $h^2 < ab$

$$h^2 = (-9)^2 = 81$$

$$ab = (13)(37) = 481$$

$h^2 < ab$  अतः वक्र "दीर्घवृत्त" को निकषित करता है.

केन्द्र के निर्देशांक :-

$$\phi(x, y) = 13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 26x - 18y + 2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -18x + 74y + 14$$

$$\text{अब } \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$$

(7)

## UNIT-III (Coordinate Geometry)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$26x - 18y + 2 = 0$$

$$2(13x - 9y + 1) = 0$$

$$13x - 9y + 1 = 0$$

$$13x - 9y = -1 \quad \text{--- (2)}$$

समी. युग्म

$$13x - 9y = -1 \quad \text{--- (2)}$$

$$9x - 37y = 7 \quad \text{--- (3)}$$

$$\text{समी. (2)} \times 13 - (1) \times 9 \quad \text{समी. (2)} \times 9 - (3) \times 13$$

$$117x - 81y = -9$$

$$117x - 481y = 91$$

$$+400y = -100$$

$$y = \frac{-100}{400}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}}$$

$y = -\frac{1}{4}$  समी. (2) में

$$13(x) - 9\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$$

$$13x + \frac{9}{4} = -1$$

$$13x = -1 - \frac{9}{4}$$

$$13x = \frac{-13}{4}$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{4}}$$

केंद्र के निर्देशांक  $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$  लिखें.

(8).

## UNIT-III (Coordinate Geometry).

केंद्र के निर्देशांक  $(-4, -4)$

मूल बिन्दु मानने पर शक्य का समीकरण

$$13x^2 - 18xy + 31y^2 + \frac{\Delta}{ab-h^2} = 0$$

$$\frac{\Delta}{ab-h^2} = \frac{-1600}{400} = -4$$

$$13x^2 - 18xy + 31y^2 - 4 = 0 \quad \text{Ans.}$$

Exp-3. निम्न शक्य के अक्षों के समीकरण तथा लंबाई की ज्ञात करें?

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$$

Sol<sup>n</sup>

शक्य का समीकरण  $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$  ---- (1)

मानक रूप

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{---- (2)}$$

(1) व (2) की तुलना

$$a=2, \quad h=\frac{5}{2}, \quad b=2.$$

अक्षों की लंबाई का समीकरण

$$r^4 (ab-h^2) - r^2(a+b) + 1 = 0$$

$$r^4 (4 - \frac{25}{4}) - r^2(2+2) + 1 = 0$$

$$\frac{9r^4}{4} - 4r^2 + 1 = 0$$

$$9r^4 - 16r^2 + 4 = 0$$

$$(9r^2 - 2)(r^2 + 2) = 0$$

$$r^2 = \frac{2}{9} \quad r^2 = -2$$

$$r = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \quad r = 2i$$

अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई  $= 2r_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

सम्युंजनी अक्ष की लंबाई  $= 2\sqrt{2}$

I.IMP.

## UNIT-III (Coordinate Geometry)

Exp-5. सिद्ध कीजिए कि शंकु  $ax^2 + 2hxy + by^2 = v$  की अर्ध अक्षों की लं  $\sqrt{v/(a+h)}$  तथा  $\sqrt{v/(a-h)}$  हैं, तथा इनका सदिशी समी.  $x^2 - y^2 = 0$  है.

Sol<sup>n</sup> शंकु का समी.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = v \quad \text{--- (1)}$$

रूप

$$\left(\frac{a}{v}\right)x^2 + 2\left(\frac{h}{v}\right)xy + \left(\frac{b}{v}\right)y^2 = 1 \quad \text{--- (2)}$$

समी. (2) की तुलना  $Ax^2 + By^2 + 2Hxy = 1$  --- (3) से

$$A = \frac{a}{v} \quad H = \frac{h}{v} \quad B = \frac{b}{v}$$

यदि  $r_1$  व  $r_2$  अर्ध अक्षों की लं हैं तो समी.

$$\left(A - \frac{1}{r_1^2}\right) \left(B - \frac{1}{r_2^2}\right) = H^2$$

$$\left(\frac{a}{v} - \frac{1}{r_1^2}\right) \left(\frac{a}{v} - \frac{1}{r_2^2}\right) = \left(\frac{h}{v}\right)^2$$

$$\left(\frac{a}{v} - \frac{1}{r_1^2}\right)^2 = \left(\frac{h}{v}\right)^2$$

$$\frac{a}{v} - \frac{1}{r_1^2} = \pm \frac{h}{v}$$

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{a}{v} \pm \frac{h}{v} = \frac{v}{v} (a \pm h)$$

$$r_1^2 = \frac{v}{a \pm h} \quad r_1 = \sqrt{v/(a+h)} \quad r_2 = \sqrt{v/(a-h)}$$

H. Proved.

शंकु के अक्षों के समी.

$$\left(A - \frac{1}{r_1^2}\right)x + Hy = 0 \quad \left(A - \frac{1}{r_2^2}\right)x + Hy = 0$$

$$\left(\frac{a}{v} - \frac{v}{v}\right)x + Hy = 0 \quad \left(\frac{a}{v} - \frac{v-h}{v}\right)x + Hy = 0$$

$$\left(\frac{a}{v} - \frac{a+h}{v}\right)x + \frac{h}{v}y = 0 \quad \left(\frac{a}{v} - \frac{a-h}{v}\right)x + \frac{h}{v}y = 0$$

$$\left(\frac{a}{v} - \frac{a}{v} - \frac{h}{v}\right)x + \frac{h}{v}y = 0 \quad \left(\frac{a}{v} - \frac{a}{v} + \frac{h}{v}\right)x + \frac{h}{v}y = 0$$

$$\frac{-h}{v}(x-y) = 0 \quad \frac{h}{v}(x+y) = 0$$

सम्युक्त समी.  $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$  H-Proofed

Ex 6. समी.  $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$  द्वारा शांकव का  
अनुरेखण कीजिए ?

Sol<sup>n</sup> शांकव की समी.

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

मानके

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{--- (2)}$$

(1) व (2) से

$$a=1, h=1, b=1, g=-1, f=0, c=-1$$

$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

$$\Delta = -1 + 0 - 0 - 1 + 1 = -1$$

$$\boxed{\Delta = -1} \text{ अतः } \Delta \neq 0$$

$$\text{अब } ab - h^2$$

$$h^2 = ab$$

$\Delta \neq 0, h^2 = ab$  अतः शांकव एक "परवलय" है.

समी. (1)

$$x^2 + 2yx + y^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(x+y)^2 - 2x - 1 = 0$$

1-पर शक्ति

$$(x+y+\lambda)^2 = x^2 + y^2 + \lambda^2 + 2xy + 2\lambda x + 2\lambda y$$

$$= 2x + 1 + \lambda^2 + 2\lambda x + 2\lambda y$$

$$(x+y+\lambda)^2 = x(2\lambda+2) + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 \quad \text{--- (3)}$$

सरल रेखा  $x+y+\lambda=0$  तथा  $x(2\lambda+2) + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$

परस्पर लम्बवत हैं

$$x+y+\lambda=0 \text{ से } x(2\lambda+2) + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$m_1 = -1$$

$$m_2 = -\frac{2\lambda+2}{2}$$

## UNIT-III (Coordinate Geometry).

$$m_1 = -1 \quad m_2 = \frac{-\lambda(\lambda+2)}{\lambda}$$

लम्बवत हैं

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$(-1) \left( \frac{-\lambda-2}{\lambda} \right) = -1$$

$$\lambda + 2 = -\lambda$$

$$2\lambda + 2 = 0$$

$$2\lambda = -2$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{1}{2}}$$

$\lambda$  का मान समी. (3) में रखने पर

$$(x+y-\frac{1}{2})^2 = x-y+\frac{5}{4}$$

$$\left( \frac{x+y-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x-y+\frac{5}{4}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$Y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} X \quad \text{--- (4)}$$

$$X = \frac{x-y+\frac{5}{4}}{\sqrt{2}} \quad Y = \frac{x+y-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}$$

समी. (4) परवलय को निकाल करती हैं.

(i) अक्ष का समी. :-  $Y=0 \quad x+y-\frac{1}{2}=0 \quad \text{--- (5)}$

(ii) स्पर्श रेखा का समी. :-

$$X=0 \quad x-y+\frac{5}{4}=0 \quad \text{--- (6)}$$

(iii) शीर्ष के निर्देशांक :-

$$x+y-\frac{1}{2}=0 \quad 4x-4y+5=0$$

$$2x+2y-1=0 \quad 4x-4y=-5 \quad \text{--- (8)}$$

$$2x+2y=1 \quad \text{--- (7)}$$

(7)  $\times 2$

$$4x+4y=2$$

$$4x-4y=-5$$

$$\hline 8x = -3$$

$$\boxed{x = -\frac{3}{8}}$$

∵ का मान समी. (4) में रखने पर,

$$2x + 2y = 1$$

$$2\left(-\frac{3}{8}\right) + 2y = 1$$

$$-\frac{3}{4} + 2y = 1$$

$$2y = 1 + \frac{3}{4}$$

$$2y = \frac{7}{4}$$

$$\boxed{y = \frac{7}{8}}$$

केंद्र के निर्देशांक  $\left(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$  हैं

(IV) नाभिलम्ब की लः :-

$$4a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x \text{ से [समी. (4) से]}$$

(V) नाभिके निर्देशांक :-

$$x = a \quad y \neq 0$$

$$\frac{x - y + 5/4}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$x - y + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x - y + 1 = 0 \text{ ----- (9)}$$

$$y = 0$$

$$x + y - \frac{1}{2} = 0$$

$$x + y = \frac{1}{2} \text{ ----- (10)}$$

## UNIT-III (Coordinate Geometry).

(vi) नियता का समी. :-

$$\text{नियता का समी. } x + a = 0$$

$$\frac{x - \frac{3}{4} + \frac{5}{4}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{x - \frac{3}{4} + \frac{5}{4}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{4x - 4\left(\frac{3}{4}\right) + 5}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} = 0$$

$$4x - 4\left(\frac{3}{4}\right) + 6 = 0$$

$$x - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = 0$$

Tracing of Parabola :-

(i) सबसे पहले शीर्ष  $(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8})$ (ii) शीर्ष से एक रेखा जो बिन्दु  $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$  से गुजरती है(iii) वह बिन्दु के लिए समी. (1) में  $y=0$  रखने पर,

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}, \sqrt{2} = 1.414$$

$$x = 0, 2, 4, \text{ (लगभग)}$$

समी. (1) में  $y=0$  पर

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y = \pm 1$$

बिन्दु  $(0, 1)$  व  $(0, -1)$ 

वह बिन्दु प्राप्त होते हैं.

